文章编号:1005-3085(2010)03-0503-10

Neumann 问题热平衡积分法细化解的收敛性*

徐湘田[1,2]， 令 锋[2]

(1- 内蒙古工业大学理学院，呼和浩特 010051； 2- 肇庆学院计算机科学与软件学院，肇庆 526061)

摘 要: 本文应用热平衡积分法及其细化方法求得了 Neumann 问题的分段线性近似解。在参数 S 充分大的条件下，应用伽玛函数及不完全伽玛函数的性质，证明了 Neumann 问题的热平衡积分细化解的收敛性，并求得各相的收敛速度分别为 $O(n^{-1})$、$O(n^{-1/2})$。本文推广了热平衡积分细化解收敛性分析中的一些已知结论。

关键词: 热平衡积分法；近似解；Neumann 问题；收敛速度

分类号: **AMS**(2000) 35A35; 65M99　　**中图分类号**: O175.29　　**文献标识码**: A

1 引言

热平衡积分法 (Heat Balance Integral Method, HBIM) 是 Goodman[1] 于 1958 年提出的求解导热问题的一种近似方法。大量实例表明，选取适当的近似函数就能得到所求问题的较好的近似解。然而，Langford[2] 举例说明了 HBIM 中近似函数的选取无统一的办法，并指出使用高次多项式不一定能提高近似解精度。为解决这一问题，Noble[3] 提出用剖分积分区间与分段低次多项式相结合的办法 (即细化、Refinement)。Bell 在文献 [4,5] 最先应用了该方法，其数值结果证实了 HBIM 细化的有效性。1985 年，文献 [6] 理论上证明了半无限纯导热问题 HBIM 细化解的收敛性。但仅限于纯导热问题，未讨论相变问题。2005 年，Mosally 等人结合数值实验给出了单相融化问题的 HBIM 细化解在 Stefan 数 $\beta = 1$ 时的收敛速度[7]，但其结果依赖于数值实验，故不能作为严格的理论依据。2008 年，文献 [8] 证明了单相融化问题的 HBIM 细化解在 Stefan 数 $\beta \geq 1$ 时收敛于精确解，给出了收敛速度。

工程实践中导热问题大多是两相或多相的，一般难以求其解析解，人们通常用近似方法求解此类问题。本文从理论上考察将 HBIM 和细化方法应用于这类问题的合理性，为便于比较，文中以解析解存在的 Neumann 问题[9] 作为两相问题的模型，结合文献 [6,7] 中的方法，给出了该问题的热平衡积分细化解的收敛条件和收敛速度。

2 Neumann 问题的热平衡积分模型

Neumann 问题[9] 的数学描述如下

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x \leq X(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \alpha_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \quad X(t) \leq x < +\infty, \tag{2}$$

收稿日期: 2008-10-10.　**作者简介**: 徐湘田 (1983年11月生)，男，硕士. 研究方向：相变导热问题的近似解法.
***基金项目**: 广东省自然科学基金 (04011600)；教育部留学回国人员科研启动基金 ([2005]55).

$$T_1(0,t) = T_s, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} T_2(x,t) = T_o, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$T_1(X,t) = T_2(X,t) = T_f, \tag{5}$$

$$k_1\frac{\partial T_1}{\partial x} - k_2\frac{\partial T_2}{\partial x} = \rho l\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}, \quad x = X. \tag{6}$$

$[0, X]$ 为第一相，$[X, +\infty]$ 为第二相，

$$\alpha_1 = \frac{k_1}{\rho_1 c_1}, \quad \alpha_2 = \frac{k_2}{\rho_2 c_2}k_i,$$

ρ_i, c_i $(i = 1, 2)$ 分别为两相的热传导系数、密度、热容。α_1, α_2 为两相热扩散系数。记 $\alpha_1/\alpha_2 = \alpha_{12}$，$k_2/k_1 = k_{21}$，已知问题 (1)-(6) 的解析解[9] 为

$$T_1 = T_s + A\ \mathrm{erf}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\Big), \tag{7}$$

$$T_2 = T_o - B\Big[1 - \mathrm{erf}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\Big)\Big] = T_o - B\ \mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\Big), \tag{8}$$

$$X = 2\gamma\sqrt{\alpha_1 t}, \tag{9}$$

其中 $\mathrm{erf}(\eta)$ 称为误差函数，其表达式为

$$\mathrm{erf}\,(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi,$$

$\mathrm{erfc}\,(\eta) = 1 - \mathrm{erf}(\eta)$ 称为误差函数的余函数。

$$A = \frac{T_f - T_s}{\mathrm{erf}(\gamma)}, \quad B = \frac{T_o - T_f}{\mathrm{erfc}(\gamma\sqrt{\alpha_{12}})}.$$

γ 为如下超越方程的根

$$\frac{\mathrm{e}^{-\gamma^2}}{\mathrm{erf}(\gamma)} - \frac{k_{21}\sqrt{\alpha_{12}}(T_o - T_f)\mathrm{e}^{-\alpha_{12}\gamma^2}}{(T_f - T_s)\mathrm{erfc}(\gamma\sqrt{\alpha_{12}})} = \frac{l\gamma\sqrt{\pi}}{c_1(T_f - T_s)}. \tag{10}$$

由解析解易知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\partial T_2}{\partial x} = 0, \quad t > 0. \tag{11}$$

为简化计算，在问题 (1)-(6) 中取

$$T_s = -1, \quad T_f = 0, \quad T_o = 1,$$

由文献 [6,7] 知，当 $T_f = 0$ 时，T_s, T_o 为任意常数都不改变近似解的收敛性质，因为对不同的 T_s, T_o，近似解和解析解的系数变化相同。而 $T_f = 0$ 总能做到，若 $T_f \neq 0$，作变量代换 $T_1' = T_1 - T_f$, $T_2' = T_2 - T_f$，这样 (5) 式可化为

$$T_1'(X,t) = T_1(X,t) - T_f = 0, \quad T_2'(X,t) = T_2(X,t) - T_f = 0,$$

且记：$S = l/c_1$。

经上述简化后，根据 HBIM 的思想[1] 对 Neumann 问题建立热平衡积分模型，即应用热平衡积分法对 Neumann 问题进行近似求解。对半无限问题应用 HBIM 需引入摄动深度[9]，即在 t 时刻，假设固定边界 $x=0$ 处的温度扰动只影响到有限的深度 $\delta(t)$ 处，超过这一深度处物体的温度仍为初始温度 T_o，也就是热交换不再发生。这就是对温度扰动的影响在瞬间达到无穷远处的近似。并从 Neumann 问题 (1)-(6) 解析解的角度分析[9] 有

$$\frac{\delta}{X}=b, \tag{12}$$

b 为与时间无关的常数且 $b>1$。引入摄动深度 $\delta(t)$ 后，则在 t 时刻时只需考虑区间 $[0,\delta(t)]$ 内的温度分布，于是对第二相控制方程的求解区间和边界条件有如下近似

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}=\alpha_2\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2},\quad X\le x\le\delta, \tag{13}$$

$$T_2(\delta,t)=T_o=1,\quad t>0. \tag{14}$$

将 (13)、(14) 代入 (2)、(4) 得到问题 (1)-(6) 的 HBIM 求解模型。

3 细化模型和分段线性热平衡积分解

将 T_1, T_2 的空间变量定义域 [0,X], [X,δ] 各自等分成 n 份，并记

$$X_i=\frac{iX}{n},\quad Y_i=X+\frac{i(\delta-X)}{n}=X+\frac{i(b-1)X}{n},\quad i=0,\cdots,n.$$

于是有

$$X_{i+1}-X_i=\frac{X}{n},\quad Y_{i+1}-Y_i=\frac{(b-1)X}{n}.$$

记 U_1^i, U_2^i 分别为 T_1, T_2 在节点 i 处的近似值，由边界条件有

$$U_1^0=-1,\quad U_1^n=U_2^0=0,\quad U_2^n=1.$$

在 $[X_i,X_{i+1}]$ 上选取线性函数作为 $T_1(x,t)$ 的近似函数，记为

$$U_1=U_1^i+\frac{n(U_1^{i+1}-U_1^i)(x-X_i)}{X},\quad x\in[X_i,X_{i+1}],\quad i=0,\cdots,n-1, \tag{15}$$

在 $[Y_i,Y_{i+1}]$ 上也选取线性函数作为 $T_2(x,t)$ 的近似函数

$$U_2=U_2^i+\frac{n(U_2^{i+1}-U_2^i)(x-Y_i)}{(b-1)X},\quad x\in[Y_i,Y_{i+1}],\quad i=0,\cdots,n-1, \tag{16}$$

由 (15)、(16) 得

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}=\frac{n(U_1^{i+1}-U_1^i)}{X},\quad x\in[X_i,X_{i+1}),\quad i=0,\cdots,n-1, \tag{17}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x}=\frac{n(U_2^{i+1}-U_2^i)}{(b-1)X},\quad x\in[Y_i,Y_{i+1}),\quad i=0,\cdots,n-1, \tag{18}$$

记

$$U_1^{i+1}-U_1^i=\Delta_1^i,\quad U_2^{i+1}-U_2^i=\Delta_2^i,$$

在 $[X_i, X_{i+1}]$, $[Y_i, Y_{i+1}]$ $(i = 0, \cdots, n-2)$ 上分别对 (1) 式和 (13) 式进行热平衡积分，根据莱布尼茨法则并用 U_1 代替 T_1，U_2 代替 T_2 整理得

$$X\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{2n^2\alpha_1}{2i+1} \cdot \frac{(\Delta_1^i - \Delta_1^{i+1})}{\Delta_1^i}, \quad i = 0, \cdots, n-2, \tag{19}$$

$$X\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{2n^2\alpha_2}{(b-1)[2n+(2i+1)(b-1)]} \cdot \frac{(\Delta_2^i - \Delta_2^{i+1})}{\Delta_2^i}, \quad i = 0, \cdots, n-2, \tag{20}$$

同理，在 $[X_{n-1}, X_n]$, $[Y_{n-1}, Y_n]$ 上对各自的方程进行积分得

$$X\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{2n^2\alpha_1[(b-1)\Delta_1^{n-1} - k_{21}\Delta_2^0]}{(b-1)[2nS + (2n-1)\Delta_1^{n-1}]}, \tag{21}$$

$$X\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{2n^2\alpha_2}{(b-1)(2nb-b+1)}, \tag{22}$$

其中在 (22) 式的推导过程中取 $Y_n = \delta(t)$ 处的温度梯度

$$\frac{\partial U_2}{\partial x}(\delta, t) = 0,$$

这是基于超过摄动深度处不再发生热交换的假设，也就是温度梯度为零。同时，作为近似解，这也和解析解的性质 (11) 式相符。令

$$\eta = \frac{\alpha_{12}(b-1)(2nb-b+1)}{2} - n + 1/2, \tag{23}$$

由 (22)、(23) 得

$$X(t) = 2 \cdot \frac{n}{\sqrt{2\eta + 2n - 1}} \cdot \sqrt{\alpha_1 t},$$

记

$$\gamma^* = \frac{n}{\sqrt{2\eta + 2n - 1}}, \tag{24}$$

又由 (19)、(22)、(23) 联立，(20)、(22)、(23) 联立可得

$$\Delta_1^i = \frac{n + \eta - 1/2}{n + \eta - i - 1} \cdot \Delta_1^{i+1}, \quad i = 0, \cdots, n-2, \tag{25}$$

$$\Delta_2^i = \frac{\frac{bn}{b-1} - 1/2}{n - i - 1} \cdot \Delta_2^{i+1}, \quad i = 0, \cdots, n-2. \tag{26}$$

另外有如下关系

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_1^k = U_1^n - U_1^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_2^k = U_2^n - U_2^0 = 1, \tag{27}$$

所以由 (25)、(26)、(27) 可解得含参数 b 的 Δ_1^i, Δ_2^i $(i = 0, \cdots, n-1)$，注意到 (21)、(22) 有

$$\frac{\alpha_1[(b-1)\Delta_1^{n-1} - k_{21}\Delta_2^0]}{2nS + (2n-1)\Delta_1^{n-1}} = \frac{\alpha_2}{2nb-b+1}, \tag{28}$$

于是求得的带参数b的Δ_1^{n-1}, Δ_2^0代入(26)可求得b，从而求得X的表达式和Δ_1^i, Δ_2^i $(i=0,\cdots,n-1)$，所以解得U_1^i, U_2^i $(i=1,\cdots,n-1)$

$$U_1^i=U_1^n-\sum_{k=i}^{n-1}\Delta_1^k=-\sum_{k=i}^{n-1}\Delta_1^k,\quad U_2^i=U_2^n-\sum_{k=i}^{n-1}\Delta_2^k=1-\sum_{k=i}^{n-1}\Delta_2^k. \tag{29}$$

4　收敛性分析

问题(1)-(6)的热平衡积分细化解的收敛性分析，需要导出Δ_1^i, U_1^i和Δ_2^i, U_2^i的具体表达式。由(25)、(26)、(27)、(29)并应用伽玛函数的性质$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$可得

$$\Delta_1^{n-1}=\frac{1}{\Gamma(\eta+1)\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(n+\eta-1/2)^k}{\Gamma(\eta+k+1)}}, \tag{30}$$

$$\Delta_1^i=\frac{\frac{(n+\eta-1/2)^{(n-i-1)}}{\Gamma(n+\eta-i)}}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(n+\eta-1/2)^k}{\Gamma(\eta+k+1)}},\quad i=0,\cdots,n-1, \tag{31}$$

$$U_1^i=-\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-i-1}\frac{(n+\eta-1/2)}{\Gamma(\eta+k+1)}}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(n+\eta-1/2)^k}{\Gamma(\eta+k+1)}},\quad i=0,\cdots,n-1, \tag{32}$$

$$\Delta_2^{n-1}=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(bn/(b-1)-1/2)^k}{\Gamma(k+1)}}, \tag{33}$$

$$\Delta_2^0=\frac{\frac{(bn/(b-1)-1/2)^{n-1}}{\Gamma(n)}}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(bn/(b-1)-1/2)^k}{\Gamma(k+1)}}, \tag{34}$$

$$U_2^i=1-\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-i-1}\frac{(bn/(b-1)-1/2)^k}{\Gamma(k+1)}}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(bn/(b-1)-1/2)^k}{\Gamma(k+1)}},\quad i=0,\cdots,n-1. \tag{35}$$

又由(10)式易知，对充分大的S，则γ很小，于是对这样的γ，误差函数$\mathrm{erf}(\gamma)$有渐近式[10]

$$\mathrm{erf}\,(\gamma)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-\gamma^2}\cdot\left[\gamma+O(\gamma^3)\right],$$

将其代入(10)式并忽略γ的二阶以上的无穷小量解得

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{2S}}, \tag{36}$$

当S充分大时应用(36)式可得如下引理。

引理　当S充分大时，对(24)式中的γ^*，有$\lim\limits_{x\to+\infty}\gamma^*=\gamma$，其收敛速度为$O(n^{-1})$。

证明 注意到 (30) 式中分母中的每一项

$$\Gamma(\eta+1)\frac{(n+\eta-1/2)^k}{\Gamma(\eta+k+1)}\geq 1,\quad k=0,\cdots,n-1,$$

故有

$$\Gamma(\eta+1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n+\eta-1/2)^k}{\Gamma(\eta+k+1)}\geq n,$$

所以 $\Delta_1^{n-1}\leq\frac{1}{n}$，再由 (28) 式有

$$\frac{\alpha_2}{2nb}<\frac{\alpha_2}{2nb-b+1}<\frac{\alpha_1 b}{2n^2S},$$

从而有

$$b>\sqrt{\frac{nS}{\alpha_{12}}},$$

即 b 发散于正无穷。因此当 $n\to+\infty$ 时，有 $b/(b-1)\to 1$。所以当 $n\to+\infty$ 时，由 (34) 式知

$$\Delta_2^0\to\frac{\frac{(n-1/2)^{n-1}}{\Gamma(n)}}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1/2)^k}{\Gamma(k+1)}}.$$

再根据 Bell 和 Abbas 文中推得的结论[6]，当 $n\to+\infty$ 时，

$$\frac{(n-1/2)^{n-1/2}}{\Gamma(n)\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1/2)^k}{\Gamma(k+1)}}\to\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

于是得

$$\Delta_2^0\to\frac{\frac{(n-1/2)^{n-1}}{\Gamma(n)}}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1/2)^k}{\Gamma(k+1)}}\to\sqrt{\frac{2}{n\pi}},\tag{37}$$

又由 b 发散于无穷大，故 $n\to+\infty$ 时

$$\frac{\eta}{n}=\alpha_{12}\Big(\frac{n-1/2}{n}\cdot b^2-\frac{n-1}{n}\cdot b-\frac{1}{2n}\Big)+\frac{1}{2n}-1=\alpha_{12}\cdot b^2,\tag{38}$$

将 (37)、(38) 代入 (28) 式中并略去无穷小量得

$$\Delta_1^{n-1}=\frac{nS}{\eta}+\sqrt{\frac{c}{\pi\eta}},\tag{39}$$

其中 $c=2\cdot k_{21}^2\cdot\alpha_{12}$，从 (38) 式知当 n 足够大时，$\eta\geq Sn^2$，也即

$$n\leq\sqrt{\frac{\eta}{S}}<\sqrt{\eta},$$

于是

$$\Gamma(\eta+1)\frac{(n+\eta-1/2)^k}{\Gamma(\eta+k+1)}\leq\Big(1+\frac{1}{\sqrt{\eta}}\Big)^k,\quad k=0,\cdots,n-1,$$

所以当 S 充分大时，这里指使得

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{S}}} \approx 1 + \frac{1}{\sqrt{S}}$$

时，有

$$\Gamma(\eta+1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n+\eta-1/2)^k}{\Gamma(\eta+k+1)} \le \sum_{k=0}^{n-1}\Big(1+\frac{1}{\sqrt{\eta}}\Big)^k \le \big(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{S}}}-1\big)\sqrt{\eta} \approx \sqrt{\frac{\eta}{S}},$$

所以由上式结合 (30)、(39) 式得

$$n\sqrt{S} \ge \sqrt{\eta}\Big(1-\sqrt{\frac{c}{\pi S}}\Big), \tag{40}$$

对充分大的 S 有

$$\Big(1-\sqrt{\frac{c}{\pi S}}\Big) \approx 1,$$

故由 (40) 式有 $\eta \le n^2 S$，因此得 $\eta = n^2 S$。于是有

$$\lim_{n\to+\infty}\gamma^* = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{2\eta+2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2S}} = \gamma,$$

且有 $\gamma^* = \gamma + O(n^{-1})$。　**证毕**

为考察边界 $x=0$ 处的热流和节点处温度的收敛情况，引入不完全伽玛函数[11]

$$\mathrm{g}(a,z) = \int_0^z \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\mathrm{d}t.$$

由分部积分得

$$\mathrm{g}(a,z) = (a-1)\mathrm{g}(a-1,z) - \mathrm{e}^{-z}z^{a-1}. \tag{41}$$

对边界 $x=0$ 处的近似热流 $k_1\frac{\partial U_1}{\partial x}$ 和近似温度 U_1^i 有如下定理。

定理 1　当 S 充分大时

$$\lim_{n\to+\infty}k_1\frac{\partial U_1}{\partial x} = k_1\frac{\partial T_1}{\partial x}, \quad x=0, \quad \lim_{n\to+\infty}U_1^i = T_1^i,$$

且二者的收敛速度均为 $O(n^{-1})$。

证明　由 (17) 和 (31) 式得

$$k_1\frac{\partial U_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{k_1 n\Delta_1^0}{2\gamma^*\sqrt{\alpha_1 t}} = \frac{k_1}{\sqrt{2\alpha_1 t}}\cdot\frac{(n+\eta-1/2)^{n-1/2}}{\Gamma(n+\eta)\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(n+\eta-1/2)^k}{\Gamma(\eta+k+1)}},$$

又由引理和 Mossally 等人文中的结论[7] 有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+\eta-1/2)^{n-1/2}}{\Gamma(n+\eta)\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(n+\eta-1/2)^k}{\Gamma(\eta+k+1)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\mathrm{erf}(\gamma)},$$

并知其收敛速度为 $O(n^{-1})$。所以证得

$$\lim_{n\to+\infty}k_1\frac{\partial U_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{k_1}{\sqrt{\pi\alpha_1 t}\mathrm{erf}(\gamma)} = k_1\frac{\partial T_1}{\partial x}\Big|_{x=0},$$

且有 $O(n^{-1})$ 的收敛速度。再根据递推关系 (41) 可将 (32) 式化为

$$U_1^i = -\frac{\frac{g(\eta,n+\eta-1/2)}{\Gamma(\eta)} - \frac{g(n+\eta-i,n+\eta-1/2)}{\Gamma(n+\eta-i)}}{\frac{g(\eta,n+\eta-1/2)}{\Gamma(\eta)} - \frac{g(n+\eta,n+\eta-1/2)}{\Gamma(n+\eta)}}, \tag{42}$$

式 (42) 右边分子第一项和分母的收敛性由引理和 Mosally 等人[7] 的结论可知

$$\frac{g(\eta, n+\eta-1/2)}{\Gamma(\eta)} = \frac{1}{2}\Big[1+\mathrm{erf}(\gamma)+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\Big)\Big], \tag{43}$$

$$\frac{g(n+\eta, n+\eta-1/2)}{\Gamma(n+\eta)} = \frac{1}{2}\Big[1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{n+\eta}}\Big)\Big], \tag{44}$$

对于 (42) 式分子第二项的收敛性，注意到对固定的点 (x,t) 有

$$\frac{iX}{n} \le x < \frac{(i+1)X}{n},$$

令 $\xi = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}$，于是有

$$\frac{iX}{2n\sqrt{\alpha_1 t}} \le \xi < \frac{(i+1)X}{2n\sqrt{\alpha_1 t}},$$

所以当 $n \to +\infty$ 时，$i \sim \xi\sqrt{2(n+\eta)}$ 从而得

$$\frac{g(n+\eta-i, n+\eta-1/2)}{\Gamma(n+\eta-i)} = \frac{1}{2}\Big[1+\mathrm{erf}(\xi)+O\Big(\frac{1}{\sqrt{n+\eta-i}}\Big)\Big], \tag{45}$$

所以由 (43)、(44)、(45) 三式证得

$$\lim_{n\to+\infty} U_1^i = -1+\frac{\mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}})}{\mathrm{erf}(\gamma)} = T_1^i,$$

并易知其收敛速度为 $O(\eta^{-1/2})$，也就是 $O(n^{-1})$。 **证毕**

对于 U_2^i 的收敛性有如下定理。

定理 2 当 S 充分大时有

$$\lim_{n\to+\infty} U_2^i = T_2^i,$$

其收敛速度均为 $O(n^{-1/2})$。

证明 由递推关系 (41) 可将 (35) 式转换成如下形式

$$U_2^i = 1-\frac{1-\frac{g(n-i,bn/(b-1)-1/2)}{\Gamma(n-i)}}{1-\frac{g(n,bn/(b-1)-1/2)}{\Gamma(n)}}, \tag{46}$$

又由 Mosally 等人的结论[7]，对足够大的 m 有

$$\frac{g(m,z)}{\Gamma(m)} = \frac{1}{2}\Big[1+\mathrm{erf}\Big(\frac{z-m}{\sqrt{2m}}\Big)+O(m^{-1/2})\Big], \tag{47}$$

应用 (47) 式和

$$\alpha_{12}b^2 = \frac{\eta}{n} = nS,$$

的关系得出

$$\frac{\mathrm{g}(n,bn/(b-1)-1/2)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{2}\Big[1+\mathrm{erf}\Big(\frac{bn/(b-1)-1/2-n}{\sqrt{2n}}\Big)+O(n^{-1/2})\Big]$$
$$= \frac{1}{2}\Big[1+\mathrm{erf}\Big(\frac{\sqrt{\alpha_{12}}}{\sqrt{2S}}\Big)+O(n^{-1/2})\Big],$$

对 T_2 定义域中固定的点 (x,t) 有

$$X+\frac{i(b-1)X}{n}\le x< X+\frac{(i+1)(b-1)X}{n},$$

同样取 $\xi=\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}$，故依照定理1中的方法知，当 $n\to+\infty$ 时

$$i\sim\frac{\xi\sqrt{2n+2\eta-1}-n}{b-1}.$$

所以由 (47) 式和 b 的性质

$$\frac{\mathrm{g}(n-i,bn/(b-1)-1/2)}{\Gamma(n-i)}=\frac{1}{2}\Big[1+\mathrm{erf}(\xi)+O\Big((n-i)^{-1/2}\Big)\Big],$$

因此由 (46) 式得

$$\lim_{n\to+\infty}U_2^i=1-\frac{1-\mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}})}{1-\mathrm{erf}(\frac{\sqrt{\alpha_{12}}}{\sqrt{2S}})}=1-\frac{\mathrm{erfc}(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}})}{\mathrm{erfc}(\gamma\sqrt{\alpha_{12}})}=T_2^i\ ,$$

且其收敛速度为 $n^{-1/2}$。 **证毕**

5 结论

本文应用HBIM的细化求得Neumann问题的热平衡积分细化解，证明了该近似解在参数 S 充分大时收敛到解析解，并求得各相的收敛速度。和两相问题类似，本文的细化模型和求解方法可用于多相传热问题，文中收敛性结果为HBIM细化法在多相问题中的应用提供了理论依据。此外，本文推广了文献[6,7]中的结论。事实上，可以把Neumann问题的第一相看作单相变问题，第二相看作纯导热问题。纯导热问题则可将摄动深度视为相变面，故可看作相变问题来处理。另外，分析文献[6,7]和本文的结论，发现融化参数 γ 的收敛性质决定其它量的收敛性质，故考察 γ 的收敛性与温度场及热流的收敛性之间的内在联系应该在HBIM的研究中引起重视。

参考文献:

[1] Goodman T R. The heat-balance integral and its application to problems involving a change of phase[J]. Tran ASMEJ Heat Transfer, 1958, 80: 335-342

[2] Langford D. The heat balance integral method[J]. Int J Heat Mass Transfer, 1973, 16: 2424-2428

[3] Noble B. Heat balance methods in melting problems[C]// Ockendon J R, Hodgkins W R (eds.), Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion, Oxford Conference, March 1974, Oxford: Clarendon Press, 1975

[4] Bell G E. A refinement of the heat balance integral method applied to a melting problem[J]. Int J Heat Mass Transfer, 1978, 21: 1357-1362

[5] Bell G E. Solidification of a liquid about a cylindrical pipe[J]. Int J Heat Mass Transfer, 1979, 22: 1681-1686

[6] Bell G E, Abbas S K. Convergence properties of the heat balance integral method[J]. Numer Heat Transfer, 1985, 8: 373-382

[7] Mosally F, Wood A S, AL-Fhaid A. On the convergence of the heat balance integral method[J]. Applied Mathematical Modelling, 2005, 29: 903-912

[8] 徐湘田，令锋. 单相融化问题热平衡积分细化解的收敛性[J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版)，2009, 40(2): 6-9
Xu X T, Ling F. Convergence properties of the refined heat balance integral solution for the set of one-phase melting broblem[J]. Journal of Inner Mongolia University, 2009, 40(2): 6-9

[9] Lunadini V J. Heat Transfer in Cold Climate[M]. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1981

[10] Wood A S. A new look at the heat balance integral method[J]. Applied Mathematical Modelling, 2001, 25: 815-824

[11] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions[M]. New York: Dover Press, 1965

Convergence Properties of the Refined Heat Balance Integral Solution for the Neumann Problem

XU Xiang-tian[1,2], LING Feng[2]

(1- College of science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051;
2- School of Computer Science, Zhaoqing University, Zhaoqing 526061)

Abstract: A piecewise linear approximate solution for the Neumann problem is presented by using the heat balance integral method and its refined method. It is proved that the approximate solution converges formally to the exact solution at large values of the parameter S and the convergence rate in each phase is $O(n^{-1})$ and $O(n^{-1/2})$, respectively, by using the properties of the Gamma function and incomplete Gamma function. The methods used in this paper can be applied to two-phase and multi-phase heat conduction problems. The present work generalizes the former results in convergence analysis to the refined heat balance integral solution.

Keywords: heat balance integral method; approximate solution; Neumann problem; convergence rate

Received: 10 Oct 2008. **Accepted:** 01 Apr 2009.

Foundation item: The Natural Science Foundation of the Guangdong Province (04011600); the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars of the Education Ministry (2005[55]).